Numerik für Differenzialgleichungen

Sommersemester 2017

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. S. Bartels
M.Sc. S. Hertzog

Informationen und aktuelle Hinweise zur Vorlesung finden Sie im Internet unter
`https://aam.uni-freiburg.de/agba/lehre/ss17/ndgln` .

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1 (4 Punkte) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Zeichnen Sie die Phasendiagramme der Differenzialgleichung $z' = Az$ in einer Umgebung des Ursprungs für vier typische Situationen charakterisiert durch

$$\text{(i) } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \text{(ii) } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{<0}, \quad \text{(iii) } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1\lambda_2 < 0, \quad \text{(iv) } \lambda_1 = \overline{\lambda}_2.$$

Aufgabe 6.2 (4 Punkte) Ein numerisches Verfahren führe für jede Schrittweite $\tau > 0$ zu beschränkten Approximationen der skalaren Differenzialgleichung $y' = \lambda y$, sofern $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ gilt. Zeigen Sie, dass das Verfahren A-stabil ist.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte) Seien $\alpha \in \mathbb{R}^m$, $\beta \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $\gamma \in \mathbb{R}^m$ die Koeffizienten eines Runge-Kutta-Verfahrens. Zeigen Sie, dass die zugehörige Stabilitätsfunktion eine polynomielle oder rationale Funktion ist.

Aufgabe 6.4 (4 Punkte) (i) Sei $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $G(z) = (1 - z^2)^2$. Skizzieren Sie die Funktion G und zeigen Sie, dass G μ-konvex ist.
(ii) Es gelte $G(x) \geq -c_1 + c_2|x|^p$ mit $p \geq 1$. Zeigen Sie, dass G koerziv ist und, sofern G zudem stetig ist, ein Minimum besitzt.
(iii) Der Satz von Peano besagt, dass jedes Anfangswertproblem $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$, mit einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung in einem Intervall $(0, \varepsilon)$ besitzt und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, sofern die Lösung beschränkt bleibt. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $y' = -\nabla G(y)$ mit einer koerziven Funktion $G \in C^1(\mathbb{R}^n)$ für jeden Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}^n$ eine auf ganz $\mathbb{R}_{\geq 0}$ definierte Lösung besitzt, und diskutieren Sie die Anwendbarkeit auf die Differenzialgleichung $y' = -y^3$.

Abgabe: Am Mittwoch, den 19. Juli 2017, zu Beginn der Vorlesung.